互いに素な整数の数

　自然数nに対して，nとの最大公約数が 1 である自然数の個数を$f(n)$で表す。
たとえば，6 との最大公約数が 1 であるものは 1 と 5 の 2 個であるあるから$f(6)=2$である。
$f(10712)$を求めよ。

2012　近畿大学 改

解答と解説

10712 の素因数をもたない 10712 未満の自然数ならば, 10712 との最大公約数が 1 である。
そこで，まず 10712 の素因数分解を試みる。

$10712 = 2^3 \times 1339$

1339 の素因数で最小のものを p とすると，$1339 = pq$ かつ $p \leq q$ である。

$p \leq q$ であるのは,

q が素数ならば $p \leq q$ でなければならないし,

q が素数でないならば q の素因数を q' とすると，$p \leq q'$ でなければならないからだ。

よって，$1339 = pq > p^2$

これと $31^2 < 1339 < 37^2$ より，p は 31 以下の素数である。

31 以下の素数は 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31 があり, 2 と 5 は 1339 の素因数たり得ないから,
それら以外の素数について調べると，13 のとき，$1339 = 13 \times 103$ より，$p = 13$，$q = 103$

ここで，103 は素数だから，q も 1339 の素因数である。

よって，10712 を素因数分解すると，$2^3 \times 13 \times 103$

したがって, 10712 以下の自然数で 2,13,103 を素因数にもたないものの数を求めればよい。
そこで，10712 以下の自然数の数を全体集合 U，2 の倍数の集合を A，13 の倍数の数の集合を B，103 の倍数の集合を C とすると,

$n(U) = 10712$，$n(A) = 5356$，$n(B) = 824$，$n(C) = 104$，$n(A \cap B) = 412$，$n(B \cap C) = 8$，
$n(C \cap A) = 52$，$n(A \cap B \cap C) = 4$ だから,

$$
\begin{aligned}
f(10712) &= \left(\overline{A \cup B \cup C}\right) \\
&= n(U) - n(A \cup B \cup C) \\
&= n(U) - \{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)\} \\
&= 10712 - (5356 + 824 + 104 - 412 - 8 - 52 + 4) \\
&= 4896 \quad \cdot\cdot\cdot(\text{答})
\end{aligned}
$$